ODE Lekce 6

neděle 15. listopadu 2020 16:57

Soustavy lineárních rovnic s konst. koeficienty

① Tvar soustavy:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + f_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + f_n(x) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Maticový zápis soustavy:

$$y' = \mathbb{A}\cdot y + f, \qquad (2)$$

kde $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in M(n\times n, \mathbb{R})$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$f = (f_1, \dots, f_n)$.

Zde $\mathbb{A}$ je tedy konstantní matice, která nezávisí na proměnné x, y je neznámá vektorová fce $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $x \in \mathbb{R}$ je daná vektorová funkce.

Úvodní příklad:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - 2e^x \end{cases}$$

Řešení: Z 1. rovnice dostaneme vyjádření: $y_2 = y_1' - x$. Potom, pokud dosadíme za y_2 do 2. rovnice, obdržíme rovnici:

$$(y_1' - x)' = y_1 - 2e^x.$$

Pak

$$y_1'' - 1 = y_1 - 2e^x \iff y_1'' - y_1 = 1 - 2e^x.$$

Poslední rovnice je lineární rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty. Tuto rovnici již umíme řešit:

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x e^x - 1.$$

Odtud

$$y_2 = y_1' - x = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - e^x - x e^x - x$$

$$y_2 = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - (1+x) e^x - x. \qquad \blacksquare$$

② Řešení soustavy $y' = \mathbb{A} y$ $\quad (y(x) \in \mathbb{R}^n)$.

Předpokládejme, že $\exists\, (\lambda, \underline{v}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tak, že $\mathbb{A}\cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$.

Ukážeme, že pak je funkce $y : x \longmapsto y(x) = e^{\lambda x}\cdot \underline{v}$ partikulárním řešením soustavy $y' = \mathbb{A}\cdot y$:

Výpočtem zjistíme, že $y'(x) = (e^{\lambda x}\cdot \underline{v}) = \lambda e^{\lambda x}\cdot \underline{v}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\cdot y(x) &= \mathbb{A}\left(e^{\lambda x}\cdot \underline{v}\right) = e^{\lambda x} \mathbb{A} \underline{v} = \\ &= e^{\lambda x}(\lambda \underline{v}) = \lambda e^{\lambda x} \underline{v} = \\ &= y'(x). \end{aligned}$$

Tedy platí:

Věta: Nechť $\mathbb{A} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ = „Množina všech matic $n \times n$ s reálnými prvky“ a nechť $\underline{v}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu matice $\mathbb{A}$. Pak je fce $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^{\lambda x} \cdot \underline{v}$ řešením soustavy $y' = \mathbb{A} y$.

Dále se zabývejme případem, kdy má matice $\mathbb{A} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ n různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

V následujícím příkladu je $\mathbb{A} \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$ symetrickou maticí a tudíž jsou všechna vlastní čísla reálná.

Příklad (Poč. úloha, A je sym. matice 2×2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

Hledejme funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ tak, aby platilo

$$\left\{ \begin{aligned} y_1' &= \quad\; y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Soustavu zapišme ve tvaru: $y' = \mathbb{A} \cdot y$, kde $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Krok: zjištění vl. čísel: $\lambda \in \mathbb{C}$ patří mezi vl. čísla matice $\mathbb{A}$ $\iff$ $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}) = 0$, kde $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ je tzv. jednotková matice.

Charakteristická rovnice: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$,

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Spektrum matice $\mathbb{A}$: $\boxed{spec(\mathbb{A}) = \{-1, 1\}}$.

Určíme vlastní vektory příslušné vlastním číslům $\boxed{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1}$:

$\underline{v} \in \mathcal{E}_{\lambda_1}(A) \iff \mathbb{A} \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{v}$ ($\mathcal{E}_{\lambda_1}(A)$ značí vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$ tvořený vl. vektory příslušnými vl. číslu λ_1.)

Tedy $\underline{v} \in \mathcal{E}_{\lambda_1}(A) \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{aligned} v_2 &= -v_1 \\ v_1 &= -v_2 \end{aligned} \right\}$$

Nechť $v_1 = 1$, pak $v_2 = -1$. Tedy $\underline{v}^1 = (1, -1)^T \in \mathcal{E}_{-1}(\mathbb{A})$.

Dále $\underline{v} \in \mathcal{E}_{\lambda_2}(A) \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

$$\left\{ \begin{aligned} v_2 &= v_1 \\ v_1 &= v_2 \end{aligned} \right\}.$$

Položme $v_1 = 1$, pak $v_2 = 1$, tedy $\underline{v}^2 = (1, 1) \in \mathcal{E}_{\lambda_2}(\mathbb{A})$.

Vlastní vektory $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Dále jsou partikulární řešení: $y^1(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot \underline{v}^1$, $y^2(x) = e^{\lambda_2 x} \cdot \underline{v}^2$ lin. nez. řešeními soustavy $y' = \mathbb{A} \cdot y$.

Nyní pro lib. konstanty C_1, C_2 je $y = c_1 \cdot y^1 + c_2 y^2$ řešením soustavy $y' = \mathbb{A} \cdot y$. Hledejme C_1 a C_2 tak, aby platilo:

$$y(0) = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

$$y(0) = C_1 \cdot y^1(0) + c_2 \cdot y^2(0) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot 0} \cdot \underline{v}^1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 0} \cdot \underline{v}^2 =$$

$$= C_1 \cdot \underline{v}^1 + C_2 \cdot \underline{v}^2 = \left(\underline{v}^1 \ \underline{v}^2\right)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} =$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 + c_2\\-c_1 + c_2\end{pmatrix}.$$

Tedy poč. podmínky $(*)$ lze psát takto jako soustavu dvou lin. rovnic o dvou neznámých C_1, C_2:

$$\left\{\begin{array}{rl} C_1 + C_2 &= 4 \\ -C_1 + C_2 &= 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2C_2 = 6 \Rightarrow \boxed{C_2 = 3.}$$

Pak $\boxed{C_1 = 1}$.

Výsledek:

$$y(x) = C_1 \cdot y^1(x) + C_2 \cdot y^2(x) =$$

$$= 1 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 3 \cdot e^{x} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{-x}\\-e^{-x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3e^{x}\\3e^{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-x} + 3e^{x}\\-e^{-x} + 3e^{x}\end{pmatrix}.$$

Tedy jednotlivé fce $y_1(x)$, $y_2(x)$ řešící soustavu

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = \qquad y_2 \\ y_2' = y_1 \end{array}\right\}$$

jsou fce $y_1(x) = e^{-x} + 3 \cdot e^{x}$, $y_2(x) = -e^{-x} + 3 \cdot e^{x}$. Navíc platí:

$y_1(0) = 4$ a $y_2(0) = 2$. ∎

Připomeňme, že je důležité to, že je-li spektrum spec$(\mathbb{A})$ matice $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ n-prvková množina, pak jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice $\mathbb{A}$ lineárně nezávislé.

Ukažme pro jednoduchost, že uvedené tvrzení platí pro $n = 2$. Důkaz lze pak zobecnit pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Mějme tedy matici $\mathbb{A}$ typu 2×2 a spec$(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dále předpokládejme, že $\underline{v}^1$ je nenulový vlastní vektor příslušný vl. číslu λ_1 a že $\underline{v}^2$ je nenulový vl. vektor příslušný vl. číslu λ_2. Dále předpokládejme, že:

$$C_1 \cdot \underline{v}^1 + C_2 \cdot \underline{v}^2 = \underline{0}. \tag{$*$}$$

Pokud rovnost $(*)$ vynásobíme číslem λ_2, dostaneme:

$$C_1 \cdot \lambda_2 \underline{v}^1 + C_2 \lambda_2 \underline{v}^2 = \underline{0}. \tag{$**$}$$

Dále vynásobme rovnost $(*)$ maticí $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A} \cdot \left(C_1 \underline{v}^1 + C_2 \cdot \underline{v}^2\right) = \mathbb{A} \cdot \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$C_1 \mathbb{A} \underline{v}^1 + C_2 \mathbb{A} \cdot \underline{v}^2 = \underline{0} \Rightarrow$$

$$C_1 \lambda_1 \underline{v}^1 + C_2 \lambda_2 \underline{v}^2 = 0. \tag{$***$}$$

Pokud nyní odečteme rovnost (**) od rovnosti (***), máme:

$$c_1(\lambda_1-\lambda_2)\cdot v^1 = 0$$

kde $0\neq\lambda_1-\lambda_2$. Odtud plyne, že $c_1=0$. Podobně se dokáže, že $c_2=0$. ■

Příklad (matice soustavy 3×3, vl. čísla $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$):

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbb{A}-\lambda\cdot\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}-\lambda\cdot\mathbb{E}) =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \operatorname{spec}(\mathbb{A}) = \{1,2,3\}.$$

Vlastní vektory jsou $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_1(\mathbb{A})$, $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_2(\mathbb{A})$,

$\underline{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_3(\mathbb{A})$.

Hledejme čísla c_1, c_2, c_3 tak, aby platilo:

$$c_1\cdot\underline{v}^1 + c_2\cdot\underline{v}^2 + c_3\cdot\underline{v}^3 = y(0), \text{ tj.}$$

$$c_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pak $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$.

Řešením je fce $\boxed{y(x) = 2\cdot e^{x}\cdot\underline{v}^1 + 3\cdot e^{2x}\cdot\underline{v}^2 + 4\cdot e^{3x}\cdot\underline{v}^3.}$

Odtud je
$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= 2e^{x} + 3e^{2x} + 4e^{3x} \\ y_2(x) &= 3e^{2x} + 4e^{3x} \\ y_3(x) &= 4e^{3x}. \end{aligned} \right\}$$

■

Nyní uvedeme argument proč existuje vždy řešení počáteční úlohy

$$y' = \mathbb{A}y, \quad y(0) = \underline{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Zatím jsme uvažovali pouze speciální případ, kdy má matice $\mathbb{A}$ $n\times n$ n různých vlastních čísel $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Jim pak přísluší n lineárně nezávislých vektorů $\underline{v}^1,\dots,\underline{v}^n$. Funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}\cdot\underline{v}^1, \ \dots, \ y_n(x) = e^{\lambda_n x}\cdot\underline{v}^n, \text{ pak}$$

tvoří tzv. fundamentální systém řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y$. Jinými slovy, funkce $y_1,\dots,y_n$ tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y$. Pak k danému vektoru

$\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ existuje jednoznačně určená n-tice čísel $c_1,\dots,c_n$

tak, že $c_1 \cdot \underline{v}^1 + c_2 \underline{v}^2 + \dots + c_n \underline{v}^n = \underline{b}$. Pak lze hledané řešení počáteční úlohy vyjádřit ve tvaru:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \left(\underline{v}^1 \ \underline{v}^2 \dots \underline{v}^n\right) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & e^{\lambda_2 x} & \\ & & \ddots \ e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\underline{v}^1 \dots \underline{v}^n\right) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot \underline{v}^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \underline{v}^n =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_1^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \cdot v_1^n \\ c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_2^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \cdot v_2^n \\ \text{- - - - - - - - - - - -} \\ c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_n^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \cdot v_n^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_1^i, \dots, y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_n^i.$$

Dále se zabývejme obecným případem, kde nebudeme předem nic předpokládat o vlastních číslech matice $\mathbb{A}$. Ukážeme, že vždy existuje právě jedno řešení poč. úlohy:

$$y' = \mathbb{A} y, \quad y(0) = \underline{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Je-li $\mathbb{A} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, pak je-li $\mathbb{A} = (a_{ij})$, potom $\mathbb{A} \cdot x \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ a platí:

$$(\mathbb{A} \cdot x)_{ij} = a_{ij} \cdot x, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\mathbb{A} \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x & a_{12} \cdot x & \dots & a_{1n} \cdot x \\ - & - & - & - \\ a_{n1} \cdot x & a_{n2} \cdot x & \dots & a_{nn} \cdot x \end{pmatrix}.$$

Pokud $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$, pak $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ a definujeme:

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Vůči těmto operacím tvoří $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ o dimenzi n^2.

$Mat(n \times n, \mathbb{R})$ tvoří dokonce strukturu, které se říká normovaný lineární prostor.

Definice. Uspořádanou dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazveme normovaným lineárním prostorem, jestliže $(X, +, \cdot)$ tvoří lineární (vektorový) prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) vůči operacím sčítání vektorů „+“ a násobení skalárem z tělesa $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) „·“ a pokud „$\|\cdot\|$“ značí funkci

$$\|\cdot\| : X \ni x \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

vyhovující podmínkám:

(N1) $\forall x \in X: \quad \|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$.

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall x \in X: \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$

(N3) $\forall x, y \in X: \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Funkční hodnota $\|x\|$ fce $\|\cdot\|$ na vektoru x se nazývá normou vektoru x.

Cvičení: Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je lib. normovaný lineární prostor. Ukažte, že fce $d: X \times X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem:

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad x, y \in X$$

je metrikou na množině X.

Příklady. (i) Nechť $X = \mathbb{R}^n$ je n-rozměrný aritmetický lineární prostor. Pak fce $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\|\cdot\|(x) = \|\cdot\|\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = \langle x, x \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

je normou na X.

Poznamenejme, že podmínky (N1) a (N2) se ověří snadno. Podmínka (N3) nazývaná též trojúhelníkovou nerovností je důsledkem Cauchyho–Buňakovského nerovnosti:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad \text{(Přesvědčte se o tom!)}$$

(ii) (Prostor čtvercových matic s operátorovou normou):

Uvažujme lin. prostor $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ a definujme pro $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ tzv. operátorovou normu:

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\},$$

kde $\|Ax\|$ resp. $\|x\|$ značí tzv. Eukleidovskou normu vektoru $A \cdot x \in \mathbb{R}^n$ resp. $x \in \mathbb{R}^n$.

Poznamenejme, že místo suprema stačí psát maximum (proč?):

$$\|A\| = \max \{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}.$$

(Někdy, pokud budeme chtít odlišit tzv. operátorovou normu od eukleidovské normy $\|\cdot\|$, budeme ji značit: $\|\cdot\|_o$. $\|\cdot\|_o : \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_0^+$.)

Cvičení: Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že pak operátorová norma z předchozího příkladu splňuje následující vlastnosti:

(i) $\|A\| \geq 0$ a $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \underline{0}$ (N1)

(ii) $\|A \cdot \lambda\| = \|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \, \|A\|$ (N2)

(symbol $\lambda \cdot A$ značí stejnou matici jako $A \cdot \lambda$.)

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. (N3)

(iv) $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

(v) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(vi) $\|A^2\| = \|A \cdot A\| = \|A\|^2$.

Jak jsme viděli, tak normu na vekt. prostoru generuje metriku. Má tedy smysl mluvit o konvergenci.

Definice. Řekneme, že posloupnost matic $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Mat(n\times n, \mathbb{R})$ konverguje k matici $L \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\| A_n - L \| < \varepsilon \quad , \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

To zapíšeme ~~takto~~ : $L = \lim\limits_{n \to \infty} A_n .$

Cvičení : Ukažte, že posloupnost matic $\{A_m\} \subset Mat(m\times m, \mathbb{R})$ konverguje k matici $A \in Mat(m\times m, \mathbb{R})$, právě když $\forall i,j \in \{1,\dots,m\}$:

$$\lim_{m \to \infty} (A_m)_{ij} = (A)_{ij} \in \mathbb{R}.$$

($(A_m)_{ij}$ značí prvek matice A_m v i-tém řádku a j-tém sloupci; podobně pro $(A)_{ij}$.)

Návod : „⇒" $\quad \| A_m - A \|_\sigma \to 0$ pro $n \to \infty$.

je-li $e_j \in \mathbb{R}^n$, pak $(A_n - A)\cdot e_j = A_n \cdot e_j - A \cdot e_j =$
$= sl_j(A_n) - sl_j(A) \in \mathbb{R}^n$

$$\| sl_j(A_n) - sl_j(A) \|_{\mathbb{R}^n} = \| (A_n - A)\cdot e_j \| \leq \| A_n - A \|_\sigma \cdot \| e_j \| =$$
$$= \| A_n - A \|_\sigma \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

(Proč?)

$\Rightarrow sl_j(A_n) \to sl_j(A) . \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}$: $\quad a_{ij}^n = (A_n)_{ij} \to$
$\to a_{ij} = (A)_{ij}$

„⇐" Nechť $\forall i,j$: $\quad \lim\limits_{n \to \infty} (A_n)_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\| A_n - A \|_\sigma = \sup_{x \in S_{\mathbb{R}^n}} \| (A_n - A) x \|$$

Tedy $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x^n \in S_{\mathbb{R}^n}$: $\quad \| A_n - A \|_\sigma = \| (A_n - A) x^n \|_{\mathbb{R}^n} =$

$$= \Big\| \sum_{j=1}^n x_j^n \cdot sl_j(A_n - A) \Big\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j^n| \, \| sl_j(A_n - A) \| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^n \| sl_j(A_n - A) \| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \underbrace{| (A_n - A)_{ij} |}_{\to 0 \text{ pro } n \to \infty !} .$$

Definice: Uvažujme posloupnost $\{A_n\}_{n=0}^{\infty} \subset Mat(n\times n, \mathbb{R})$. Pak výraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n + \dots \qquad (*)$$

budeme nazývat nekonečnou řadou matic (z $Mat(n\times n, \mathbb{R})$).

Dále řekneme, že matice $S \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ je součtem řady (*), pokud posloupnost matic $\{S_n\}_{n=0}^{\infty} \subset Mat(n\times n, \mathbb{R})$, kde

$S_0 := A_0,\ S_1 = A_0 + A_1,\ \dots,\ S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n,\ \dots$

konverguje k matici S. Tj. pokud $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Definice. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f: (a,b) \to X$. Řekneme, že funkce f má derivaci $f'(x_0) \in X$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\left\| \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) - f'(x_0) \right\| < \varepsilon$$

pro každé $|h| < \delta$.

Poznámka: V předchozí definici pohlížíme na derivaci $f'(x_0)$ jako na element prostoru X. Ovšem na derivaci $f'(x_0)$ můžeme pohlížet též jako na element prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$. Prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$ je vektorový prostor všech lineárních zobrazení $\ell: \mathbb{R} \to X$.
Například, je-li $x \in X$, pak zobrazení $\ell_x: \mathbb{R} \to X$ definované předpisem

$$\ell_x(\lambda) = \lambda \cdot x \in X$$

je elementem prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$. Skutečně, $\forall \lambda_1, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\ell_x(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x = \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x$$
$$= \ell_x(\lambda_1) + \ell_x(\lambda_2).$$

Dále $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\ell_x(\mu \cdot \lambda) = (\mu \cdot \lambda) \cdot x = \mu \cdot (\lambda \cdot x)$$
$$= \mu \cdot \ell_x(\lambda).$$

Dále uvažujme zobrazení $\Phi: X \ni x \longmapsto \ell_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$.

Ukažme, že Φ je surjektivní zobrazení:

nechť $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$. Položme $\hat{x} := \ell(1) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\ell(\lambda) = \ell(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot \ell(1) = \lambda \cdot \hat{x}.$$

Tedy $\ell = \ell_{\hat{x}}$. Čili $\Phi(X) = \mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$. Dále ukážeme, že se jedná o izomorfismus:

nechť $x_1, x_2 \in X$ a $\mu \in \mathbb{R}$, pak $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x_1 + \mu x_2)(\lambda) = \ell_{x_1 + \mu x_2}(\lambda) = \lambda \cdot (x_1 + \mu x_2) =$$

$$= \lambda x_1 + \lambda(\mu x_2) = \lambda x_1 + \mu(\lambda x_2) = \ell_{x_1}(\lambda) + \mu \cdot \ell_{x_2}(\lambda)$$

$$= \Phi(x_1)(\lambda) + \mu \Phi(x_2)\cdot(\lambda) \Rightarrow \Phi(x_1+\mu x_2) = \Phi(x_1) + \mu \Phi(x_2).$$

Navíc $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0_X\}$: nechť $\Phi(x) = \ell_x$ a $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \ell_x(\lambda) = 0_X$.

Odtud $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot x = 0_X$ (= nulový prvek prostoru X). Speciálně:

$$x = 1 \cdot x = 0_X.$$

$\Rightarrow$ Φ je izomorfismus vekt. prostoru X na vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$.

Dále ukážeme, že $\forall x \in X : \|x\| = \|\Phi(x)\| = \|\ell_x\|$.

Zde platí: $\|\ell_x\| = \sup\limits_{\lambda \in \langle -1,1 \rangle} \|\ell_x(\lambda)\| = \sup\limits_{\lambda \in \langle -1,1 \rangle} \|\lambda \cdot x\|$.

Odtud $\|\ell_x\| \geqq \|\ell_x(1)\| = \|1 \cdot x\| = \|x\|$. Na druhé straně máme:

$$\forall \lambda \in \langle -1,1 \rangle : \|\ell_x(\lambda)\| = \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|.$$

Shrneme-li předchozí pozorování, vidíme že skutečně $\forall x \in X : \|x\| = \|\Phi(x)\|$.

Tedy s ohledem na zjištění, že prostory X a $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$ jsou tzv. izometricky izomorfní, lze $\forall x \in X$ ztotožnit element $x \in X$ s lineárním zobrazením $\Phi(x) = \ell_x$!

Lemma. Nechť $f : (a,b) \longrightarrow \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, $x_0 \in (a,b)$,
$\forall x \in (a,b) : f(x) \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ a $f(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$, kde
$\forall i,j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pak f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, právě když $\forall i,j = 1, \dots, n$ ex. derivace $a'_{ij}(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak $f'(x_0) = (a'_{ij}(x_0))_{i,j=1}^{n}$.

Cvičení. a) Nechť $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $(A \cdot x)^n = A^n \cdot x^n$.

(Návod: postupujte pomocí důkazu mat. indukcí. Např. pro $n = 2$ máme: $[(A \cdot x)^2]_{ij}$ = „prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci" =

$$= \sum_{k=1}^{n} (A \cdot x)_{ik} \cdot (A \cdot x)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot x)(a_{kj} \cdot x)$$

$$= x^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj} = x^2 \cdot (A^2)_{ij} = (A^2 \cdot x^2)_{ij}.$$

$\Rightarrow$ $(A \cdot x)^2 = A^2 \cdot x^2$.)

b) Nechť $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$. Ukažte, že

$$\frac{d}{dx} (A \cdot x)^m = m \cdot A \cdot (A \cdot x)^{m-1}.$$

(Návod: Pro $n=1$ lze s využitím předchozího lemmatu odvodit:

$$\left(\frac{d}{dx} A\cdot x\right)_{ij} = \frac{d}{dx}(A\cdot x)_{ij} = \frac{d}{dx}(a_{ij}\cdot x) = a_{ij}.$$ Pak

$\frac{d}{dx} A\cdot x = A$. Dále položme $B = A^n$, $t = x^n$. Pak

$$\frac{d}{dx}(A\cdot x)^n = \frac{d}{dx}(A^n\cdot x^n) = \frac{d}{dx} B\cdot t\Big|_{t=x^n} = B\cdot \frac{d}{dx}(x^n) =$$

$$= A^n\cdot(n x^{n-1}) = (n\cdot A)\cdot A^{n-1} x^{n-1} = n\cdot A\cdot (A\cdot x)^{n-1}.)$$

Definice. Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že se jedná o Banachův prostor, jestliže v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje.

To znamená, že máme-li dánu posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a

$$\|x_m - x_n\| \to 0 \text{ pro } m,n\to\infty,$$

pak ex. element $x\in X$ takový, že

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ pro } n\to\infty.$$

Příklady. (i) Nechť $X=\mathbb{R}$ a $\forall x\in\mathbb{R}: \|x\| := |x|$. Pak je $(X,\|\cdot\|)$ je Banachův prostor.

(ii) Nechť $X = Mat(n\times m, \mathbb{R})$, $\|\cdot\|$ nechť je operátorová norma na prostoru matic $Mat(n\times m,\mathbb{R})$. Pak je $(X,\|\cdot\|)$ Banachův prostor.

Cvičení. Prověřte tvrzení v předchozích příkladech!

Definice: Nechť $\{A_n\}_{n=0}^{\infty} \subset Mat(n\times m,\mathbb{R})$. Řekneme, že nekonečná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

absolutně konverguje, konverguje-li číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$.

Lemma. Je-li nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ($A_n\in Mat(n\times m,\mathbb{R})$) abs. konvergentní, pak tato řada konverguje v obvyklém smyslu, tj. existuje matice $B\in Mat(n\times m,\mathbb{R})$ taková, že

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} A_n - S\right\| \to 0 \text{ pro } N\to\infty.$$

Důkaz: Ukažme, že posloupnost částečných součtů řady $\{S_N\}_{N=0}^{\infty} \subset Mat(n\times m,\mathbb{R})$ je Cauchyovská. Je-li $M,N\in\mathbb{N}$, $M>N$, pak

$$\|S_M - S_N\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} A_n\right\| \le \sum_{n=N+1}^{M} \|A_n\| \to \quad M,N\to\infty.$$

Je-likož je prostor $(\mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ Banachův prostor, ex. $S \in \mathrm{Mat}(n\times m, \mathbb{R})$ tak, že $S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n := \lim_{N\to\infty} S_N$. ∎

VĚTA. Nechť $A \in \mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R})$, $x\in\mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A\cdot x)^n}{n!}$ konverguje absolutně $\forall x\in\mathbb{R}$.

Důkaz. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$:
$$\left\|\frac{(A\cdot x)^n}{n!}\right\| = \left\|\frac{A^n\cdot x^n}{n!}\right\| = \frac{(\|A\|\,|x|)^n}{n!},$$
Odtud:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{(A\cdot x)^n}{n!}\right\| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\|A\|\,|x|)^n}{n!} = e^{\|A\|\cdot|x|} < \infty.$$ ∎

Definice: Nechť $A\in\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$, $x\in\mathbb{R}$. Pak definujeme:
$$e^{A\cdot x} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A\cdot x)^n}{n!} \in \mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R}).$$
V předchozí definici jsme tedy definovali fci $f: \mathbb{R}\ni x \longmapsto e^{A\cdot x}\in\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$.
$$f:\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R}),\quad f(x) = e^{A\cdot x},\quad x\in\mathbb{R}.$$
V dalším textu ukážeme, že $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = A\cdot e^{A\cdot x} = e^{A x}\cdot A$.

Všimněme si, že
$$e^{A\cdot 0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A\cdot 0)^n}{n!} = E + A\cdot 0 + \frac{1}{2!}(A\cdot 0)^2 + \dots$$
$$= E \quad (= \text{jednotková matice}).$$

Definice stejnoměrné konvergence řady:

Nechť $\forall n\in\mathbb{N}$ máme dánu fci $f_n: \langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R})$. Pak říkáme, že funkční řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$
stejnoměrně konverguje k sumě $S:\langle a,b\rangle\to\mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R})$, jestliže $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $\forall N>n_0(\varepsilon)$, $\forall x\in\langle a,b\rangle$:
$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

VĚTA. Předpokládejme, že máme $\forall n\in\mathbb{N}$: $f_n:\langle a,b\rangle\to\mathrm{Mat}(n\times m,\mathbb{R})$, $f_n\in C^1(\langle a,b\rangle)$. Dále předpokládejme, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ stejnoměrně konvergují na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Pak platí, že $S\in C^1(\langle a,b\rangle)$ a
$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Důkaz. Je obdobný jako v případě reálných fcí $f_n:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$. □

Lemma: Pro každé $K>0$ řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A x)^n}{n!}$ stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle -K, K\rangle$ k součtu $S(x) = e^{A\cdot x}$.

Důkaz. $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}\frac{(A\cdot x)^n}{n!} - e^{A\cdot x}\right\| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(|x|\,\|A\|)^n}{n!} \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(K\cdot\|A\|)^n}{n!}. \qquad (*)$$

Nyní jelikož $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K\cdot\|A\|)^n}{n!} = e^{K\cdot\|A\|}$, tak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=n(\varepsilon)}^{\infty}\frac{(K\cdot\|A\|)^n}{n!} < \varepsilon.$$

Z odhadu $(*)$ pak plyne, že $\forall N > n(\varepsilon), \forall x \in \langle a,b\rangle$ máme:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}\frac{(Ax)^n}{n!} - e^{Ax}\right\| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(K\cdot\|A\|)^n}{n!} \leqq \sum_{n=n(\varepsilon)}^{\infty}\frac{(K\|A\|)^n}{n!} < \varepsilon.$$

Tedy : $\sum_{n=0}^{N}\frac{(Ax)^n}{n!} \rightrightarrows e^{Ax}$ na $\langle a,b\rangle$. ∎

Cvičení: Nechť $M \in \mathbb{N}$, nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ konverguje absolutně. Dokažte nerovnost:

$$\left\|\sum_{n=0}^{M}A_n - S\right\| \leqq \sum_{n=M+1}^{\infty}\|A_n\|,$$

kde $S = \sum_{n=0}^{\infty} A$.

Návod: Nechť $M, N \in \mathbb{N}$ a $N > M$. Pak máme:

$$\sum_{n=0}^{M}A_n - S = \left(\sum_{n=0}^{N}A_n - S\right) - \left(\sum_{n=M+1}^{N}A_n\right).$$

Pak s využitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme:

$$\left\|\sum_{n=0}^{M}A_n - S\right\| \leqq \left\|\sum_{n=0}^{N}A_n - S\right\| + \left\|\sum_{n=M+1}^{N}A_n\right\| \leqq$$

$$\leqq \left\|\sum_{n=0}^{N}A_n - S\right\| + \sum_{n=M+1}^{N}\|A_n\|.$$

Pokud nyní přejdeme k limitě pro $N \to \infty$, dostaneme:

$$\left\|\sum_{n=0}^{M}A_n - S\right\| \leqq \sum_{n=M+1}^{\infty}\|A_n\|. \quad ∎$$

VĚTA $\forall A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ je funkce $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{Ax}$ spojitě diferencovatelnou fcí na $\mathbb{R}$ a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(e^{Ax}\right)' = A\cdot e^{Ax} = e^{Ax}\cdot A.$$

Důkaz. $\forall n \in \mathbb{N}$ je funkce $f_n(x) = \frac{(Ax)^n}{n!}$, $f_0(x) = E$ spojitě diferencovatelná a $\forall x \in \mathbb{R}$: $f_n'(x) = n\cdot A\,\frac{(Ax)^{n-1}}{n!} = n\,\frac{(Ax)^{n-1}}{n!}\cdot A$, $f_0'(x) = 0 \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$.

Tedy $\forall N \in \mathbb{N}$ máme: $\sum_{n=0}^{N} f_n'(x) = A\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(Ax)^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(Ax)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\cdot A.$

Substitucí $m = n-1$ dostaneme:

$$\sum_{m=0}^{N-1} f_n'(x) = A\left(\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(Ax)^m}{m!}\right) = \left(\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(Ax)^m}{m!}\right)\cdot A.$$

Z předchozího textu víme, že $\forall K > 0$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m'(x) \rightrightarrows A\cdot e^{A\cdot x} = e^{Ax}\cdot A \quad \text{na intervalu } \langle -K, K\rangle.$$

Stejně tak $\sum_{m=0}^{N} f_m(x) \rightrightarrows e^{A\cdot X}$ na $\langle -K, K\rangle$.

Z předchozí věty máme: $f \in C^1(\langle -K, K\rangle)$, kde $f(x) = e^{A\cdot X}$.

Navíc:

$$f'(x) = \left(e^{Ax}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = A\cdot e^{Ax} = e^{Ax}\cdot A.$$

Navíc $f \in C^1(\langle -k, k\rangle)$ $\forall k > 0$. Tedy fce f je na $\mathbb{R}$ spojitě diferencovatelnou fcí. ■

Lemma: Předpokládejme, že fce $f : (a,b) \to Mat(n\times n, \mathbb{R})$, $g : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ mají derivace v bodě $x_0 \in (a,b)$. Pak ex. derivace funkce $f\cdot g : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ v bodě x_0 a platí:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Důkaz: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall x \in (a,b)$:

$$\mathbb{R} \ni \left(f(x)\cdot g(x)\right)_i = \sum_{j=1}^{n} (f(x))_{ij}\cdot (g(x))_j .$$

Z předchozího výkladu víme, že z existence derivace $f'(x_0)$ plyne existence derivace $\frac{d}{dx}\left((f(x))_{ij}\right)\Big|_{x=x_0}$ pro každé $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Stejně tak ex. derivace $\frac{d}{dx}\left((g(x))_j\right)\Big|_{x=x_0}$ pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$.

Pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ pak ex. derivace $\frac{d}{dx}\left((f(x)\cdot g(x))_i\right)\Big|_{x=x_0}$ a platí:

$$\frac{d}{dx}\left((f(x)\cdot g(x))_i\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} (f(x))_{ij}\cdot (g(x))_j\right)\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx}\left[(f(x))_{ij}\cdot (g(x))_j\right]\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{d}{dx}\left[(f(x))_{ij}\right]\Big|_{x=x_0}\cdot (g(x_0))_j + (f(x_0))_{ij}\cdot\frac{d}{dx}\left((g(x))_j\right)\Big|_{x=x_0}\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left\{(f'(x_0))_{ij}\cdot (g(x_0))_j + (f(x_0))_{ij}\cdot (g'(x_0))_j\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (f'(x_0))_{ij}\cdot (g(x_0))_j + \sum_{j=1}^{n} (f(x_0))_{ij}\cdot (g'(x_0))_j =$$

$$= \left(f'(x_0)\cdot g(x_0)\right)_i + \left(f(x_0)\cdot g'(x_0)\right)_i =$$

$$= \left(f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)\right)_i . \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Cvičení (Leibnizovo pravidlo): Mějme dvě funkce $f, g : (a,b) \to Mat(n\times n, \mathbb{R})$, $x_0 \in (a,b)$.

Dokažte, že existují-li derivace $f'(x_0), g'(x_0) \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$, potom existuje derivace součinu:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Lemma. $\forall A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ je matice $e^{A} = e^{A\cdot 1}$ regulární maticí a platí:

$$\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Značí-li 0 nulovou matici z $Mat(n\times n, \mathbb{R})$, pak je $e^{0} = E$.

Důkaz. $e^{0} = e^{0\cdot 1} = E + \frac{1}{1!}(0\cdot 1) + \frac{1}{2!}(0\cdot 1)^2 + \dots = E.$

Nyní $\forall t \in \mathbb{R}$ nechť $\varphi(t) = e^{A\cdot t}\cdot e^{-A\cdot t}$. Pak podle předchozího lemmatu platí $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \left(e^{At}\right)'\cdot e^{-A\cdot t} + \left(e^{A\cdot t}\right)\cdot\left(e^{-At}\right)' =$$
$$= e^{At}\cdot A\cdot e^{-At} + e^{At}\cdot(-A)\cdot e^{-At} = e^{At}\left(A\cdot e^{-At} - A\cdot e^{-At}\right)$$
$$= 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \varphi(t) = \varphi(0) = E.$$

Speciálně $E = \varphi(1) = e^{A}\cdot e^{-A}$. $\blacksquare$

HLAVNÍ VĚTA: Nechť $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje jediné řešení počáteční úlohy:

$$y' = A\cdot y, \quad y(0) = \underline{b}, \qquad \text{(PÚ)}$$

$A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$. Řešení je dáno vztahem:

$$\boxed{y(x) = e^{Ax}\cdot \underline{b}.}$$

Důkaz. Je jednoduché ukázat, že fce $y(x) = e^{A\cdot x}\cdot \underline{b}$ je řešením počáteční úlohy (PÚ). Dokážeme ještě jednoznačnost řešení úlohy (PÚ):

Předpokládejme, že $y(x)$ je lib. řešení úlohy (PÚ). Položme pak $\forall x$:

$$z(x) = e^{-Ax}\cdot y(x). \qquad (*)$$

Odtud po zderivování máme:

$$z'(x) = \left(e^{-Ax}\cdot y(x)\right)' = \left(e^{-Ax}\right)'\cdot y(x) + \left(e^{-Ax}\right)\cdot y'(x)$$

$$= -e^{-\mathbb{A}x}\cdot\mathbb{A}\cdot y(x) + \left(e^{-\mathbb{A}x}\right)\cdot\mathbb{A}\cdot y(x) = \underline{0}.$$

Odtud plyne, že $\forall x:\ z(x) = z(0) = e^{-\mathbb{A}\cdot 0}\cdot y(0) = \mathbb{E}\cdot y(0)$

$$= y(0) = \underline{b}.$$

Z $(*)$ pak plyne po roznásobení maticí $e^{\mathbb{A}x}$:

$$y(x) = e^{\mathbb{A}x}\cdot z(x) = e^{\mathbb{A}x}\cdot\underline{b}.$$

■

Důsledek. Množina všech řešení homogenní soustavy $y' = \mathbb{A}\cdot y$ tvoří n-dimenzionální prostor izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^n$.

Tento izomorfismus Φ je dán takto: $\forall\ \underline{b}\in\mathbb{R}^n$:

$$\Phi(\underline{b}):\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,\quad \Phi(\underline{b})(x) = e^{\mathbb{A}\cdot x}\cdot\underline{b}$$

Tedy: $\Phi:\mathbb{R}^n\to C^1(\mathbb{R})$.

Lemma Nechť $\mathbb{A},\mathbb{B}\in\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$, $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$. Pak platí:

$$e^{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}}.$$

Důkaz. $\varphi(s) = e^{-\mathbb{A}s}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}s} \Rightarrow \forall s:\ \varphi'(s) =$

$$= e^{-\mathbb{A}s}\cdot(-\mathbb{A})\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}s} + e^{-\mathbb{A}\cdot s}\cdot\underset{\leftrightarrow}{\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}}\cdot e^{\mathbb{A}s} =$$

$$= -e^{-\mathbb{A}s}\cdot\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}s} + e^{-\mathbb{A}s}\cdot\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}s} = 0. \Rightarrow$$

$\forall s\in\mathbb{R}:\quad \varphi(s) = \varphi(0) = \mathbb{B}.\quad$ Pak $\quad\varphi(1) = \mathbb{B} =$

$$= e^{-\mathbb{A}}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}}.$$

Odtud

$$e^{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{B} = e^{\mathbb{A}}\left(e^{-\mathbb{A}}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}}\right) = \left(e^{\mathbb{A}}\cdot e^{-\mathbb{A}}\right)\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}} =$$

$$= \mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}}.\quad ■$$

VĚTA. Předpokládejme, že matice $\mathbb{A},\mathbb{B}\in\mathrm{Mat}(n\times n;\mathbb{R})$ splňuje vlastnost: $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$. Potom platí:

$$e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}}\cdot e^{\mathbb{B}}.$$

Důkaz: Uvažujme funkci $\varphi(s) = e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot e^{\mathbb{A}\cdot s}\cdot e^{\mathbb{B}s}$. Vypočítejme derivaci funkce $\varphi(s)$ s využitím Leibnizova pravidla:

$$\varphi'(s) = \frac{d}{ds}\left(e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot e^{\mathbb{A}s}\cdot e^{\mathbb{B}s}\right) = e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot(-\mathbb{A}-\mathbb{B})\,e^{\mathbb{A}s}\cdot e^{\mathbb{B}s} +$$

$$+ e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\left(\mathbb{A}\cdot e^{\mathbb{A}s}\cdot e^{\mathbb{B}s} + e^{s\mathbb{A}}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{B}s}\right) =$$

$$= -e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\mathbb{A}\,e^{\mathbb{A}s}\cdot e^{\mathbb{B}s} - e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{\mathbb{A}s}\cdot e^{\mathbb{B}s}$$

$$+ e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\mathbb{A}\,e^{\mathbb{A}s}\cdot e^{\mathbb{B}s} + e^{-s(\mathbb{A}+\mathbb{B})}\cdot\mathbb{B}\cdot e^{s\mathbb{A}}\cdot e^{\mathbb{B}s} = 0.$$

$\varphi(0) = e^{0}\cdot e^{0}\cdot e^{0} = \mathbb{E}.\quad$ Pak $\ \forall s\in\mathbb{R}$:

$\varphi(s) = \varphi(0) = E$. Tedy

$$e^{-(A+B)} \cdot e^{A} \cdot e^{B} = E \; / \cdot e^{A+B}$$

$$e^{A} \cdot e^{B} = e^{A+B}. \quad \blacksquare$$

Dále budeme předpokládat o maticích A toto:

Čtvercové matice $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ mající n lineárně nezávislých vektorů $\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n \in \mathbb{R}^n$.

Nechť vl. vektory $\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n$ po řadě odpovídají vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Označme:

$$\Lambda := diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times n, \mathbb{R}).$$

Zde je možné, že se zde některá vlastní čísla opakují díky své algebraické násobnosti. Přitom algebraická násobnost je vždy rovna tzv. geometrické násobnosti daného vlastního čísla λ.

Tedy $\forall i = 1, \dots, n$: $am(\lambda) = gm(\lambda)$, kde

$am(\lambda)$ značí algebraickou násobnost vl. čísla λ

$gm(\lambda)$ značí tzv. geometrickou násobnost vl. čísla $=$

$$= dim(\mathcal{E}_\lambda(A)) = dim\, Ker(A - \lambda \cdot E).$$

Dále označme: $V = (\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n)$, kdy $\forall j = 1, \dots, n$:

$sl_j(V) = \underline{v}^j =$ j-tý sloupec matice $V \in Mat(n \times n)$.

VĚTA: Za výše uvedených předpokladů máme:

$$\boxed{A \cdot V = V \cdot \Lambda} \qquad (*)$$

Důkaz. $sl_j(A \cdot V) = A \cdot sl_j(V) = A \cdot \underline{v}^j = \lambda_j \cdot \underline{v}^j$; $\forall j = 1, \dots, n$

$sl_j(V \cdot \Lambda) = V \cdot sl_j(\Lambda) = \lambda_j \cdot sl_j(V) = \lambda_j \cdot \underline{v}^j$, $\forall j = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow (*)$. $\blacksquare$

Tato věta ukazuje, že matici lze tzv. diagonalizovat:

$$\boxed{A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}}$$

Tedy matice A je podobná diagonální matici Λ.

Nyní počítejme mocniny matic Λ a A:

$$\Lambda^2 = diag(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2), \dots, \Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k), \dots$$

$$\mathbb{A}^2 = (\mathbb{V}\cdot\Lambda\cdot\mathbb{V}^{-1})(\mathbb{V}\cdot\Lambda\cdot\mathbb{V}^{-1}) = \mathbb{V}\cdot\Lambda^2\cdot\mathbb{V}^{-1},$$

$$\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\cdot\mathbb{A} = (\mathbb{V}\cdot\Lambda^2\cdot\mathbb{V}^{-1})(\mathbb{V}\cdot\Lambda\cdot\mathbb{V}^{-1}) = \mathbb{V}\cdot\Lambda^3\cdot\mathbb{V}^{-1},$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{V}\cdot\Lambda^k\cdot\mathbb{V}^{-1};$$

$$\vdots$$

Dále vyjádříme částečný počet součet řady $e^{\mathbb{A}\cdot x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}\cdot x)^k}{k!}$:

$$S_N = \sum_{k=0}^{N}\frac{(\mathbb{A}\cdot x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N}\frac{\mathbb{A}^k\cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N}\frac{\mathbb{V}\cdot\Lambda^k\mathbb{V}^{-1}}{k!}\,x =$$

$$= \mathbb{V}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\Lambda^k\cdot x^k}{k!}\right)\cdot\mathbb{V}^{-1}.$$ Odtud dostáváme limitním přechodem pro $N\to\infty$:

$$e^{\mathbb{A}x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}x)^k}{k!} = \mathbb{V}\cdot e^{\Lambda x}\cdot\mathbb{V}^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{V}\cdot e^{\Lambda x}\,\mathbb{V}^{-1}.}$$

Dále, je-li $\underline{v}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu čísla λ, pak $\mathbb{A}\cdot\underline{v} = \lambda\cdot\underline{v} \Rightarrow \mathbb{A}^2\cdot\underline{v} = \mathbb{A}(\lambda\cdot\underline{v}) =$

$$= \lambda(\mathbb{A}\cdot\underline{v}) = \lambda^2\cdot\underline{v},\ \ldots,\ \mathbb{A}^k\cdot\underline{v} = \lambda^k\cdot\underline{v},\ \ldots$$

Pak $e^{\mathbb{A}\cdot x}\cdot\underline{v} = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{(\mathbb{A}\cdot x)^k}{k!}\right)\cdot\underline{v} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\mathbb{A}^k\cdot\underline{v}}{k!}\cdot x^k =$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^k\cdot x^k}{k!}\cdot\underline{v} = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{(\lambda\cdot x)^k}{k!}\right)\underline{v} =$$

$$= e^{\lambda\cdot x}\cdot\underline{v}.$$

Tedy z předchozího vyplývá, že je-li $\underline{v}$ vl. vektor matice $\mathbb{A}$ přísl. vl. čísla λ, tj. $\underline{0}\neq\underline{v}\in\mathcal{E}_\lambda(\mathbb{A})$, pak $\underline{0}\neq\underline{v}\in\mathcal{E}_{e^{\lambda x}}(e^{\mathbb{A}\cdot x})$ pro každé $x\in\mathbb{R}$.

Tedy $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ je $\underline{v}^j = sl_j(\mathbb{V})\in\mathcal{E}_{e^{\lambda x}}(e^{\mathbb{A}x})$.

Odtud $e^{\Lambda x} = \mathrm{diag}\,(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})$ = matice vl. čísel matice e^{Ax}. Tedy pak lze psát:

$$\boxed{e^{Ax} = V \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot V^{-1}}$$

Je zajímavé, že předchozí vlastnosti zůstávají v platnosti i v případě, kdy jsou vlastní čísla λ komplexní:

Příklad. Uvažujme matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Char. polynom $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i.$$

$$\underline{v} \in \mathcal{E}_i(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} v_2 &= i \cdot v_1 \\ -v_1 &= i \cdot v_2 \end{aligned} \right\}$$

Zvolíme-li $v_1 = 1$, pak $v_2 = i$, tedy $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_i(A)$.

Dále $\underline{v} \in \mathcal{E}_{-i}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} v_2 &= -i\, v_1 \\ -v_1 &= -i\, v_2 \end{aligned} \right\}$. Zvolíme-li opět

$v_1 = 1$, pak vychází $v_2 = -i$. Tj. $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{-i}(A)$.

Pak platí:

$$e^{A \cdot x} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x} = V \cdot e^{\Lambda x} \cdot V^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot (1/2) = \begin{pmatrix} e^{ix} + e^{-ix} & -ie^{ix} + ie^{-ix} \\ ie^{ix} - ie^{-ix} & e^{ix} + e^{-ix} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) & \frac{1}{2}(ie^{-ix} - ie^{ix}) \\ \frac{1}{2}(ie^{ix} - ie^{-ix}) & \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

$$\left.\begin{aligned} i e^{ix} &= -\sin x + i\cos x \\ i\cdot e^{-ix} &= \sin x + i\cos x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(i e^{-ix} - i e^{ix}\right) &= \sin x \\ \tfrac{1}{2}\left(i e^{ix} - i e^{-ix}\right) &= -\sin x \end{aligned}$$

Příklad (pokračování předchozího příkladu).

Hledejme řešení soustavy:

$$\left\{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}\right\}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{b}.$$

Řešení: Podle hlavní věty o řešení homogenní soustavy máme:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{A\cdot x}\cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \Rightarrow y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = -\sin x.$$

Zkouška dosazením:

$$y_1'(x) = -\sin x = y_2(x) \ \checkmark$$

$$y_2'(x) = -\cos x = -y_1(x). \ \checkmark$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{b} \ \checkmark$$

Příklad. Řešme následující soustavu:

$$y' = A\cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a najděme její obecné řešení.

Ř: Soustavu lze zapsat takto:

$$\left\{\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}\right\}$$

A) Z 1. rovnice vyjádříme $y_2 = y_1' - y_1$ a dosadíme do 2. rovnice za y_2:

$$(y_1' - y_1)' = y_1' - y_1$$

$$y_1'' - y_1' = y_1' - y_1$$

$$\boxed{y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0}$$

Charakteristické rovnice je : $\lambda^2-2\lambda+1=0$. Kořeny :

$$\lambda_{1,2}=1.$$

Fundamentální systém: $\tilde{y}_1(x)=e^x$, $\tilde{\tilde{y}}_1(x)=xe^x$. Pak
$\tilde{y}_1'(x)=e^x$, $\tilde{\tilde{y}}_1'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x \Rightarrow$
$\tilde{y}_2(x)=y_1'(x)-y_1(x)=0$; $\tilde{\tilde{y}}_2(x)=\tilde{y}_1'(x)-\tilde{y}_1(x)=(1+x)e^x-xe^x=e^x.$

Dostáváme tedy obecné řešení :

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=$$

$$=c_1\begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^x+c_2xe^x \\ c_2e^x \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1e^x+c_2xe^x &= y_1(x) \\ c_2e^x &= y_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} c_1 &= y_1(0) \\ c_2 &= y_2(0) \end{aligned}}$$

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.\,!$$

B) Určeme matici soustavy: $\mathbb{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$p_{\mathbb{A}}(\lambda)=\det(\mathbb{A}-\lambda\cdot E)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda)^2$$

Odtud $\lambda=1$ je jediné vlastní číslo jehož algebraická násobnost je rovna 2, tj. $a_m(\lambda)=a_m(1)=2$. Určeme geometrickou násobnost vlastního čísla $\lambda=1$.
Hledejme dimenzi prostoru $\mathcal{E}_1(A)$:

$$\mathbb{A}\cdot\underline{v}=1\cdot\underline{v}\quad,\quad\underline{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned} v_1+v_2 &= v_1 \\ v_2 &= v_2 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ Soustava má řešení : $\mathcal{E}_1(\mathbb{A})=\{(t,0):t\in\mathbb{R}\}\subset\subset\mathbb{R}^2\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad gm(1) = \dim \mathcal{E}_1(A) = 1 < am(1).$

Nyní tedy neumíme určit matici $e^{A\cdot x}$ pomocí diagonalizační metody.
Postupujme podle definice:

$$e^{A\cdot x} = E + A\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(A\cdot x)^2 + \frac{1}{6}\cdot(A\cdot x)^3 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^2 & 2x^2 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x^3 & 3x^3 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

Tedy stejně jako v části (A) obdržíme obecné řešení:

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0)\cdot e^x + y_2(0)\cdot xe^x \\ y_2(0)\cdot e^x \end{pmatrix}.$$